N. Fusco • C. Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Elementi di geometria

EdiSES

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Elementi di geometria

Volume II

Nicola Fusco
Carlo Sbordone

EdiSES

Nicola Fusco – Carlo Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base - Elementi di geometria - VOLUME 2

Estratto da
Matematica volumi 1 e 2 - N. Fusco • C. Sbordone • M. Tassalini

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2022 2021 2020 2019 2018

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Nicola Fusco
Ordinario di Analisi Matematica
Università di Napoli "Federico II"

Carlo Sbordone
Ordinario di Analisi Matematica
Università di Napoli "Federico II"

Stampato presso
Print Sprint srl - Napoli

per conto della
EdiSES s.r.l. - Piazza Dante, 89 - Napoli

www.edises.it
info@edises. it

ISBN 9788879599849

Prefazione

Il presente corso di **Fondamenti di matematica per la formazione di base** è rivolto ai futuri insegnanti delle scuole elementari e dell'infanzia e si occupa (Vol. 1) di ***numeri e operazioni*** e (Vol. 2) di ***elementi di geometria.***

L'esposizione è concisa ed essenziale e contiene spesso spunti di logica senza troppo soffermarsi in descrizioni discorsive. Si fa uso di simboli per rendere sintetiche e chiare le esposizioni di matematica, attraverso un'adeguata gradualità. Condividendo il punto di vista che i futuri insegnanti, nel corso degli studi universitari, debbano accedere ad un livello e ad una quantità di conoscenze matematiche che superino quelli relativi a quanto essi stessi dovranno poi presentare in classe, vengono offerti diversi argomenti. Viene praticato un metodo espositivo motivato dalla convinzione degli autori che ogni *concetto matematico*, anche a livello elementare, richieda una definizione precisa, ma anche l'accenno a qualche aspetto intuitivo, la motivazione della sua importanza e un po' di collocazione storica.

Inoltre, ogni *metodo di calcolo* richiede la consapevolezza di quando sia opportuno applicarlo.

Significativo è il ricorso alla coerenza. Ad esempio, nella presentazione delle operazioni aritmetiche dal caso dei numeri interi a quello delle frazioni, pur evidenziando le differenze nel passaggio dai diversi insiemi, è fondamentale mostrare che esse corrispondono allo stesso concetto.

Nel Volume 1, dopo un capitolo di teoria degli insiemi e uno di logica per la matematica, vengono presentati gli insiemi numerici, ponendo l'accento sulla loro collocazione sulla retta, e il metodo delle coordinate nel piano. Si studiano successivamente le funzioni elementari e le equazioni di primo e secondo grado. In appendice sono forniti cenni di calcolo combinatorio e cenni di probabilità e statistica

Nel Volume 2, vengono presentati i concetti primitivi della geometria euclidea, triangoli e poligoni, rette perpendicolari e parallele, relazioni tra elementi dei poligoni, trapezi, parallelogrammi, e le trasformazioni isometriche nel piano. Un capitolo è dedicato alla circonferenza e al cerchio, e uno ai poligoni inscritti e circoscritti. I teoremi di Euclide e Pitagora rientrano nel capitolo sull'equivalenza di figure piane.

Viene poi ripreso lo studio delle curve nel piano cartesiano e si considerano problemi descritti da equazioni di primo e secondo grado e da sistemi di primo grado.

Una posizione particolare occupa lo studio dei rapporti fra grandezze omogenee con particolare attenzione al teorema di Talete. Nei capitoli conclusivi vengono trattate similitudini e omotetie e presentate varie applicazioni dell'algebra alla geometria. In appendice sono presenti cenni sulle equazioni algebriche di secondo grado o ad esse riconducibili.

Napoli 4 dicembre 2017
Gli Autori

Indice

Parte I

11 Rapporti fra grandezze. Teorema di Talete

12 Similitudini e omotetie

13 Area dei poligoni. Applicazioni dell’algebra alla geometria

Parte III

Parte I

Estratti da

Matematica 1
N. Fusco • C. Sbordone • M. Tassalini

15 CONCETTI PRIMITIVI DELLA GEOMETRIA

1. Punto, retta, piano

Gli *oggetti elementari* della geometria sono il **punto,** la **retta** ed il **piano,** considerati come elementi, ovvero parti dello **spazio.**

Di questi enti non si dà la definizione, in quanto essi costituiscono dei **concetti primitivi,** che verranno via via precisati attraverso le relazioni che introdurremo.

Il piano e la retta sono insiemi di punti e la prima relazione che si considera è quella di *appartenenza* di un punto ad una retta o ad un piano.

Conveniamo di indicare:

— *i punti*: con lettere maiuscole A, B, C, ... P, Q, ...;
— *le rette*: con lettere minuscole a, b, c, ..., r, s, ...;
— *i piani*: con lettere minuscole α, β, γ, ... dell'alfabeto greco.

In figura 15.1 è rappresentato un piano α, *contenente* una retta r e due punti A e B, uno *appartenente* alla retta r e l'altro *non appartenente* ad r.

Per indicare che la retta r è *contenuta* nel piano α si dice anche che r *appartiene* al piano α o che *giace* sul piano α, ovvero che il piano α *passa* per r.

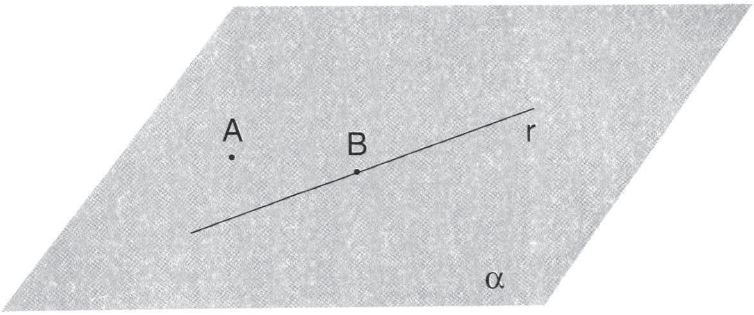


Fig. 15.1 - Il punto B appartiene alla retta r che giace sul piano α, il punto A non vi appartiene.

Per indicare che il punto B appartiene alla retta r si dice anche che B *giace* su r ovvero che r *passa* per B.

Per poter procedere nello studio della geometria, dobbiamo introdurre, accanto agli oggetti elementari, anche delle *affermazioni primitive*, dette **assiomi** o **postulati,** il cui scopo è quello di descrivere le relazioni tra gli enti primitivi.

A

ASSIOMA 1. *Lo spazio contiene infiniti piani. Ogni piano contiene infinite rette ed ogni retta contiene infiniti punti.*

A

ASSIOMA 2. *Per due punti passa una ed una sola retta* (Fig. 15.2).

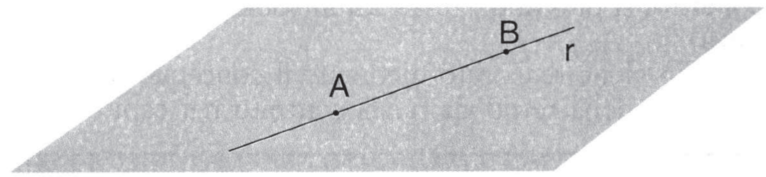


Fig. 15.2 - La retta r è individuata dai suoi due punti A e B. Essa è la loro congiungente e viene anche detta: retta AB.

Si noti che dall'assioma 2 segue che:

— *se due rette hanno in comune due punti, allora esse coincidono*;

— *due rette r e s distinte hanno al più un punto in comune, (cioè o uno o nessun punto in comune)* (Fig. 15.3).

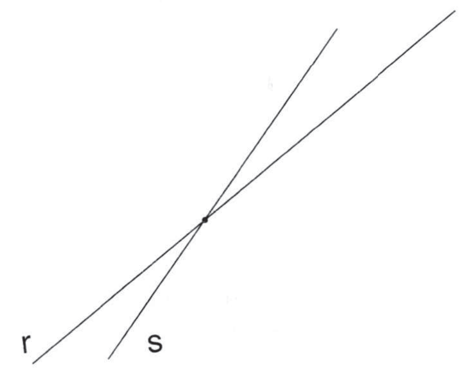


Fig. 15.3 - Le due rette distinte r e s hanno un sol punto in comune.

I seguenti assiomi riguardano proprietà del piano:

A

ASSIOMA 3. *Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano* (Fig. 15.4).

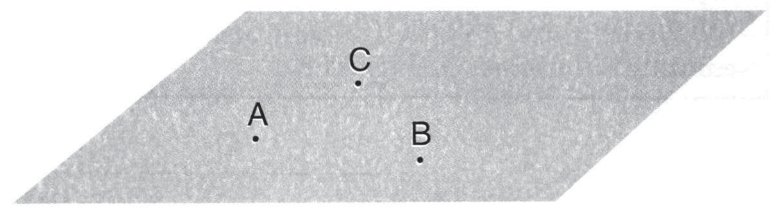


Fig. 15.4 - Il piano α è individuato dai suoi tre punti A, B, C, non allineati.

A

ASSIOMA 4. *La retta passante per due punti distinti di un piano, giace su quel piano* (Fig. 15.5).

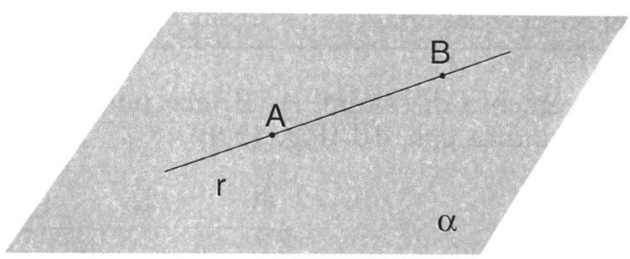


Fig. 15.5 - La retta r passante per due punti A, B del piano α, giace completamente sul piano α.

2. Proprietà della retta. Semiretta. Segmento

Così come un tratto stradale può esser percorso in due sensi, opposto l'uno dell'altro, si può immaginare di introdurre anche sulla retta due versi (di percorrenza).

Ciò viene realizzato mediante il concetto di *relazione d'ordine* (nell'insieme dei punti della retta) da noi incontrato nel capitolo quinto.

A

> ASSIOMA 5. *L'insieme dei punti di una retta può essere ordinato mediante due relazioni d'ordine, l'una opposta dell'altra, detti* **versi** *della retta.*

Una retta su cui sia fissato un **verso** si dice **orientata.**

Se A e B sono due punti della retta r, orientata nel verso indicato in figura 15.6, mediante una freccia:

Fig. 15.6 - Il punto B segue A nel verso indicato.

diremo che B *segue* A, in tale verso. Considerando il verso opposto, diremo che A *segue* B (Fig. 15.7):

Fig. 15.7 - Il punto A segue B nel verso indicato.

L'assioma 5 viene ulteriormente precisato aggiungendo che l'ordinamento è *totale* (cioè, di due punti c'è sempre uno che precede l'altro) e che sulla retta orientata *non esistono né il primo né l'ultimo punto*.

D

> *Fissato un punto O sulla retta r, esso la divide in due parti, che si chiamano* **semirette** *di* **origine** O (Fig. 15.8).

Fig. 15.8 - Le due semirette di origine O.

Ciascuna delle due semirette di origine O è costituita dall'origine O e da tutti i punti che seguono O in uno dei due versi della retta.

D

> *L'insieme dei punti di una retta r compresi fra due punti A e B di r si chiama* **segmento** *di* **estremi** A, B.

Il segmento di estremi A, B, che pure si considerano appartenenti al segmento, si indica con AB (Fig. 15.9):

Fig. 15.9 - Il segmento AB.

Evidentemente, il segmento AB è:

l'*intersezione*:

della semiretta AB di origine A

e

della semiretta BA di origine B

(v. Fig. 15.10):

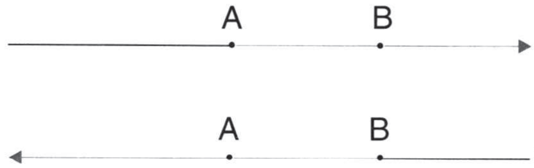


Fig. 15.10 - Il segmento AB, come intersezione di due semirette.

3. Proprietà del piano. Semipiani. Angoli

Così come una strada che attraversi completamente una città la divide in due parti e non è possibile passare da una parte all'altra senza attraversare la strada stessa, analoga situazione si presenta per una retta che giace in un piano. Appare perciò naturale accettare il seguente:

A

> **Assioma 6.** *Una retta r del piano α divide il piano, privato della retta stessa, in due parti.*

L'assioma 6 si completa precisando che *il segmento congiungente due punti A, B di α (fuori di r) non interseca r solo se A, B appartengono ad una stessa di tali parti* (Fig. 15.11).

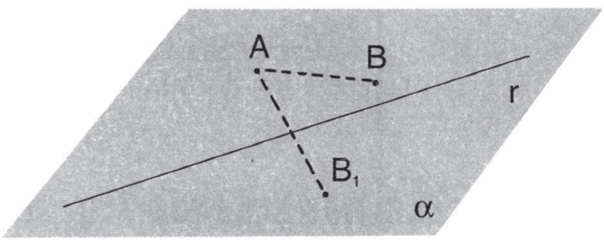


Fig. 15.11 - La retta r divide il piano α in due parti. I punti A e B appartengono alla stessa parte. I punti A e B_1 appartengono a parti diverse di α.

D

> *L'unione di r con una delle parti di α di cui all'assioma 6 prende il nome di* **semipiano** *di origine r.*

Dunque esistono sempre due semipiani aventi per origine una certa retta r e la loro intersezione coincide con r.

Due semirette r, s del piano α aventi la stessa origine O (e non sovrapposte), dividono il piano in due parti β, γ, ciascuna delle quali si chiama **angolo** di *vertice* O e *lati* r, s e si considera comprendente anche i punti di r e s (Fig. 15.12):

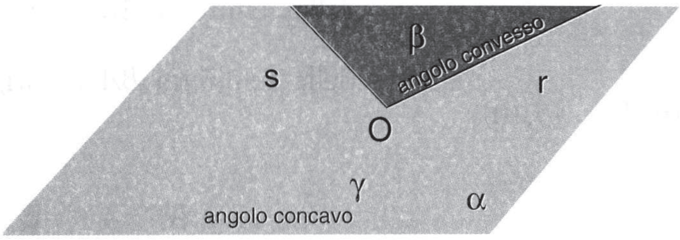


Fig. 15.12 - Le semirette r e s individuano un angolo convesso β ed un angolo concavo γ.

In figura 15.12 l'angolo β si dice **convesso** perché non contiene i prolungamenti dei lati, l'angolo γ si dice invece **concavo.** In seguito, parlando di angolo, si intenderà parlare di angolo convesso, salvo esplicito avviso contrario.

Se le due semirette sono l'una il prolungamento dell'altra (Fig. 15.13):

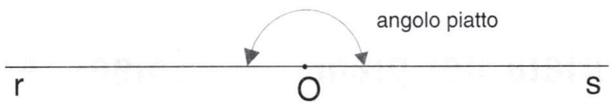


Fig. 15.13 - L'angolo piatto è determinato da due semirette, una delle quali sia il prolungamento dell'altra.

l'angolo si dice **piatto.**

Se le due semirette sono sovrapposte (Fig. 15.14), esse determinano l'**angolo giro** e **l'angolo nullo.**

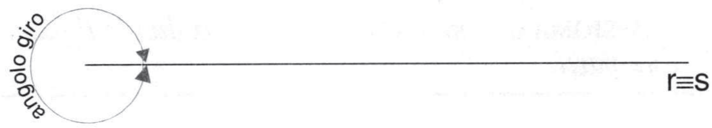


Fig. 15.14 - L'angolo giro e l'angolo nullo sono determinati da due semirette sovrapposte.

Notiamo che l'angolo piatto è un **semipiano,** l'angolo giro coincide con il piano e l'angolo nullo con la semiretta $r = s$.

4. La congruenza fra segmenti

Per **figura piana** intendiamo un qualunque insieme di punti appartenenti tutti ad uno stesso piano. Ad esempio, un angolo o un segmento sono figure piane.

Introduciamo ora il concetto di **congruenza** *tra segmenti*.

Siano AB e CD due segmenti del piano α come in figura 15.15, cioè *"sovrapponibili"*:

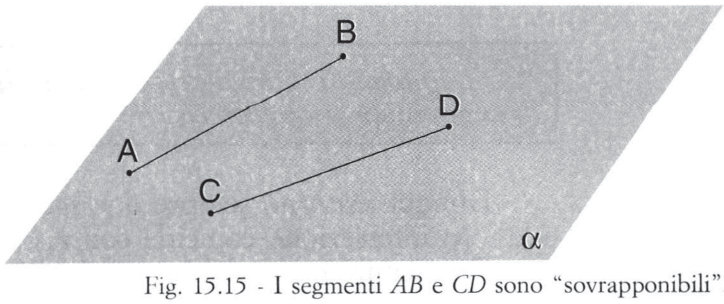


Fig. 15.15 - I segmenti AB e CD sono "sovrapponibili".

nel senso che, se le semirette di origine A e C vengono sovrapposte insieme alle loro origini mediante un opportuno **movimento** (rigido), che lasci B e D dallo stesso lato, allora anche B e D risultano sovrapposti.

In tali ipotesi diremo che i segmenti AB e CD sono **congruenti.**

Ciò **non** *vuol dire che AB e CD siano* **uguali** tra loro, ma che *esiste una particolare corrispondenza biunivoca tra* i punti *di AB e quelli di CD*, che viene detta **movimento rigido** (o *movimento senza deformazione*).

Assai importante è il seguente assioma del **trasporto dei segmenti.**

A

> **Assioma 7.** *Dati un segmento AB ed una semiretta s di origine O, esiste un unico punto C sulla semiretta s tale che il segmento OC sia congruente ad AB cioè* (Fig. 15.16):
>
> $$OC \equiv AB$$

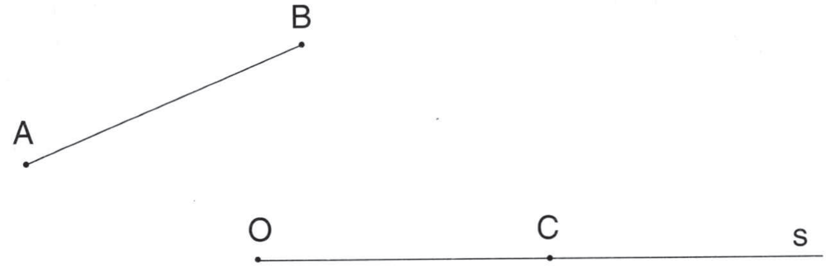


Fig. 15.16 - Vi è un unico punto C sulla semiretta s tale che $AB \equiv OC$.

Confronto e somma di segmenti

Dati due segmenti AB e CD, per *confrontarli*, utilizziamo l'assioma precedente che assicura che sulla semiretta CD vi è un unico segmento CD' congruente ad AB. Si hanno tre casi:

1) $D' = D$. Allora $AB \equiv CD$ (Fig. 15.17):

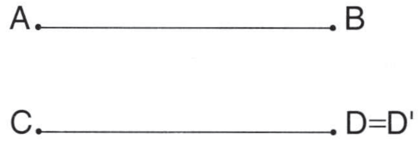


Fig. 15.17.

2) D' appartiene al segmento CD (e $D' \neq D$). Allora si dice che il segmento AB è **minore** di CD e si scrive:

$$AB < CD$$

(Fig. 15.18):

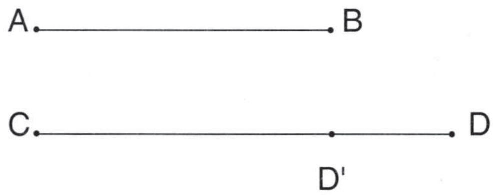


Fig. 15.18.

3) D appartiene al segmento CD' (e $D \neq D'$). Allora si dice che il segmento AB è **maggiore** di CD e si scrive:

$$AB > CD$$

(Fig. 15.19):

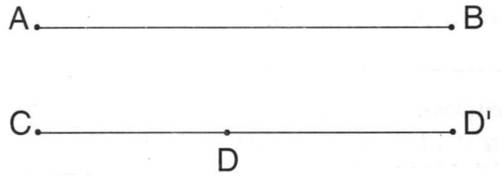


Fig. 15.19.

L'esperienza e l'intuizione suggeriscono gli assiomi seguenti per la congruenza di segmenti (e, più in generale, di figure piane, come vedremo):

1) *ogni segmento è congruente a se stesso* **(proprietà riflessiva);**
2) *se un segmento è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo* **(proprietà simmetrica);**
3) *due segmenti congruenti ad un terzo, sono congruenti tra loro* **(proprietà transitiva);**

Dalle proprietà precedenti segue che *la congruenza è una* **relazione d'equivalenza** nell'insieme dei segmenti del piano.

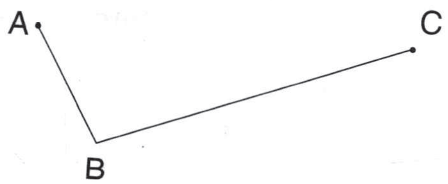
Possiamo perciò considerare (paragrafo 5 del capitolo quinto) la *classe d'equivalenza* di un certo segmento AB: essa consiste di tutti (e solo) i segmenti congruenti ad AB. Si suol dire perciò che tutti i segmenti di tale classe **hanno la stessa lunghezza** e si arriva persino ad *identificare la classe di equivalenza di AB con la* **lunghezza** di AB, proprio perché i segmenti non congruenti ad AB non appartengono a tale classe.

In definitiva **abbiamo definito la lunghezza di segmenti mediante la relazione di congruenza.**

Diamo ora due notevoli definizioni:

D

Due segmenti aventi un solo estremo in comune si dicono **consecutivi** (Fig. 15.20).



D

Due segmenti consecutivi, giacenti sulla stessa retta, si dicono **adiacenti.**

Fig. 15.20 - I segmenti AB e BC sono consecutivi.

Dati due segmenti adiacenti AB e BC, si chiama **somma** *di AB e BC, il segmento AC* e si scrive $AC = AB + BC$.

Fig. 15.21 - $AC = AB + BC$.

La somma di due segmenti non adiacenti si definisce mediante l'assioma 7. La somma di più segmenti si ottiene addizionando il primo al secondo, la somma ottenuta al terzo e così via.

La *somma di n segmenti uguali (o congruenti) al segmento $a = AB$* (con n intero maggiore di 1) si dice **multiplo di a secondo n** e si indica con:

$$na = nAB$$

(Fig. 15.22):

Fig. 15.22 - Multipli del segmento a.

Se il segmento $b = CD$ è multiplo di $a = AB$, secondo n, cioè se:

$$b \equiv na$$

diremo anche che a è sottomultiplo di b secondo n e scriveremo:

$$a \equiv \frac{1}{n} b.$$

Se AB è un segmento maggiore o congruente al segmento CD, si chiama *differenza di AB e CD il segmento che, addizionato al secondo, riproduce il primo*.

5. La congruenza fra angoli

Generalizzando la nozione di congruenza di segmenti, possiamo definire la congruenza tra due figure piane.

Cominciamo con la seguente definizione (che verrà approfondita nel cap. 19°):

D

> *Due figure piane F e G si dicono* **congruenti** *se sono sovrapponibili mediante un movimento rigido*. In tal caso scriveremo:
>
> $$F \equiv G.$$

Come nel caso dei segmenti, si assume che *la congruenza tra figure è una* **relazione di equivalenza,** cioè gode delle proprietà:

— **(proprietà riflessiva):** *ogni figura è congruente a se stessa, cioè $F \equiv F$*;

— **(proprietà simmetrica):** *se la figura F è congruente a G, allora anche G è congruente a F*;

— **(proprietà transitiva):** *Se F è congruente a G e G è congruente a H, allora F è congruente a H.*

Se F è congruente a G, il punto Q di G che venga a sovrapporsi al punto P di F si chiama **omologo** o **corrispondente** di P.

Si verifica che:

— *due rette sono sempre congruenti fra loro*;
— *due semirette sono sempre congruenti fra loro*;
— *due angoli piatti sono sempre congruenti fra loro*.

Soffermiamoci ora sulla *congruenza fra angoli*, enunciando il seguente **assioma del trasporto degli angoli.**

A

ASSIOMA 8. *Dati un angolo α ed una semiretta s di origine O, esiste un unico angolo di vertice in O, congruente ad α, avente un lato coincidente con s, giacente da una parte prefissata rispetto alla retta contenente s* (Fig. 15.23).

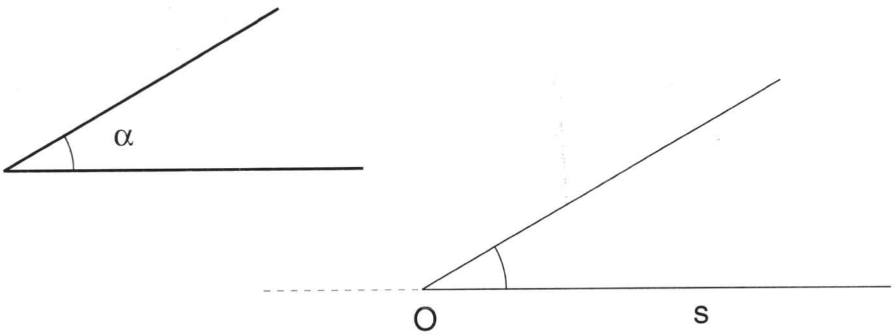


Fig. 15.23 - Vi è un unico angolo di vertice O, lato s, congruente all'angolo α.

Confronto e somma di angoli

Dati due angoli *convessi* $\alpha = \widehat{ab}$ e $\beta = \widehat{cd}$, per *confrontarli*, utilizziamo l'assioma precedente che assicura che, sul semipiano individuato dalla semiretta c in cui giace $\widehat{cd}$, esiste un unico angolo $\widehat{cd}'$congruente ad $\widehat{ab}$. Sovrapponiamo le semirette a e c in modo che le origini coincidano e gli angoli cadano in uno stesso semipiano. Come per i segmenti, si hanno tre casi:

1) Le semirette b e d vengono a sovrapporsi. Allora gli angoli ab e cd sono **congruenti.**
2) La semiretta d' è contenuta nell'angolo cd (e $d' \not\equiv d$). Allora si dice che l'angolo $\widehat{ab}$ è **minore** di $\widehat{cd}$ e si scrive (Fig. 15.24):

$$\widehat{ab} < \widehat{cd}$$

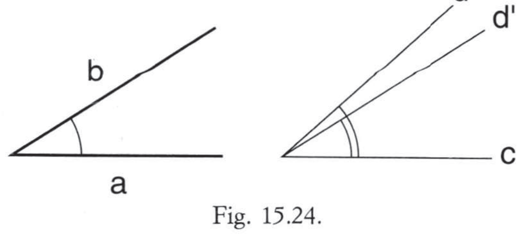


Fig. 15.24.

3) La semiretta d è contenuta nell'angolo cd' (e $d \not\equiv d'$). Allora si dice che l'angolo $\widehat{ab}$ è **maggiore** di $\widehat{cd}$ e si scrive (Fig. 15.25):

$$\widehat{ab} > \widehat{cd}$$

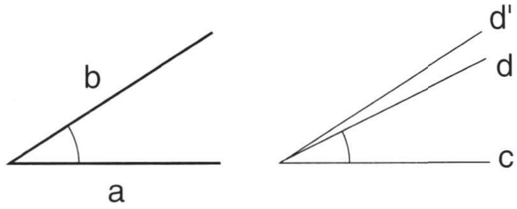


Fig. 15.25.

Similmente a quanto fatto nel caso della congruenza di segmenti, anche nel caso degli angoli, a partire dalla relazione d'equivalenza generata dalla congruenza si perviene ad un'importante definizione.

Precisamente, consideriamo la classe di equivalenza di un certo angolo α: essa consiste di tutti (e solo) gli angoli congruenti ad α. Si suol dire perciò che tutti gli angoli di tale classe **hanno la stessa ampiezza,** e si arriva ad identificare la classe di equivalenza di α con l'**ampiezza** di α.

In definitiva, **l'ampiezza di un angolo α può essere definita come la classe di equivalenza di α, mediante la relazione di congruenza.**

Diamo ora due notevoli definizioni.

D

Due angoli aventi vertici e uno dei lati coincidenti, mentre gli altri due giacciono in semipiani opposti rispetto al lato comune, si dicono **consecutivi** (Fig. 15.26).

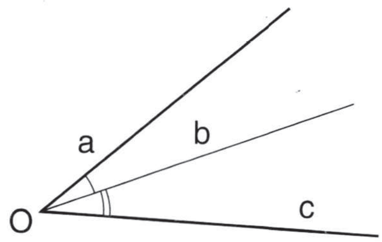


Fig. 15.26 - Gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono *consecutivi*.

D

Due angoli consecutivi, i cui lati non comuni siano allineati, si dicono **adiacenti** (Fig. 15.27).

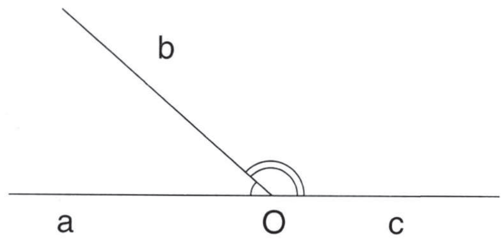


Fig. 15.27 - Gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ sono *adiacenti*.

Dati due angoli **consecutivi** $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, *l'angolo* $\widehat{ac}$ *si chiama* **somma** *di* $\widehat{ab}$ *e* $\widehat{bc}$ *e si scrive*:

$$\widehat{ac} \equiv \widehat{ab} + \widehat{bc}.$$

Se gli angoli $\widehat{ab}$ *e* $\widehat{cd}$ **non sono consecutivi,** *si chiama* **somma** *di* $\widehat{ab}$ *e* $\widehat{cd}$ *l'angolo che si ottiene addizionando due angoli consecutivi congruenti ad* $\widehat{ab}$ *e* $\widehat{cd}$ *rispettivamente* (Fig. 15.28):

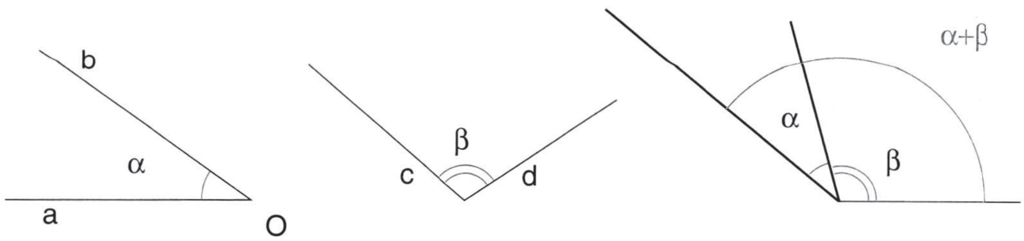


Fig. 15.28 - La somma di due angoli non consecutivi $\alpha = \widehat{ab}$ e $\beta = \widehat{cd}$.

N. Fusco • C. Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Elementi di geometria

EdiSES
www.edises.it
€ 15,00
ISBN 978-88-7959-984-9
9 788879 599849