

N. Fusco • C. Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Elementi di geometria

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Elementi di geometria

Volume II

Nicola Fusco
Carlo Sbordone



Nicola Fusco – Carlo Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base - Elementi di geometria - VOLUME 2

Estratto da

Matematica volumi 1 e 2 - N. Fusco • C. Sbordone • M. Tassalini

Copyright © 2018, EdiSES s.r.l. - Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2022 2021 2020 2019 2018

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

Nicola Fusco

*Ordinario di Analisi Matematica
Università di Napoli "Federico II"*

Carlo Sbordone

*Ordinario di Analisi Matematica
Università di Napoli "Federico II"*

Stampato presso

Print Sprint srl - Napoli

per conto della

EdiSES s.r.l. - Piazza Dante, 89 - Napoli

ISBN 9788879599849

www.edises.it
info@edises.it

Prefazione

Il presente corso di **Fondamenti di matematica per la formazione di base** è rivolto ai futuri insegnanti delle scuole elementari e dell'infanzia e si occupa (Vol. 1) di *numeri e operazioni* e (Vol. 2) di *elementi di geometria*.

L'esposizione è concisa ed essenziale e contiene spesso spunti di logica senza troppo soffermarsi in descrizioni discorsive. Si fa uso di simboli per rendere sintetiche e chiare le esposizioni di matematica, attraverso un'adeguata gradualità. Condividendo il punto di vista che i futuri insegnanti, nel corso degli studi universitari, debbano accedere ad un livello e ad una quantità di conoscenze matematiche che superino quelli relativi a quanto essi stessi dovranno poi presentare in classe, vengono offerti diversi argomenti. Viene praticato un metodo espositivo motivato dalla convinzione degli autori che ogni *concetto matematico*, anche a livello elementare, richieda una definizione precisa, ma anche l'accenno a qualche aspetto intuitivo, la motivazione della sua importanza e un po' di collocazione storica.

Inoltre, ogni *metodo di calcolo* richiede la consapevolezza di quando sia opportuno applicarlo.

Significativo è il ricorso alla coerenza. Ad esempio, nella presentazione delle operazioni aritmetiche dal caso dei numeri interi a quello delle frazioni, pur evidenziando le differenze nel passaggio dai diversi insiemi, è fondamentale mostrare che esse corrispondono allo stesso concetto.

Nel Volume 1, dopo un capitolo di teoria degli insiemi e uno di logica per la matematica, vengono presentati gli insiemi numerici, ponendo l'accento sulla loro collocazione sulla retta, e il metodo delle coordinate nel piano. Si studiano successivamente le funzioni elementari e le equazioni di primo e secondo grado. In appendice sono forniti cenni di calcolo combinatorio e cenni di probabilità e statistica.

Nel Volume 2, vengono presentati i concetti primitivi della geometria euclidea, triangoli e poligoni, rette perpendicolari e parallele, relazioni tra elementi dei poligoni, trapezi, parallelogrammi, e le trasformazioni isometriche nel piano. Un capitolo è dedicato alla circonferenza e al cerchio, e uno ai poligoni inscritti e circoscritti. I teoremi di Euclide e Pitagora rientrano nel capitolo sull'equivalenza di figure piane.

Viene poi ripreso lo studio delle curve nel piano cartesiano e si considerano problemi descritti da equazioni di primo e secondo grado e da sistemi di primo grado.

Una posizione particolare occupa lo studio dei rapporti fra grandezze omogenee con particolare attenzione al teorema di Talete. Nei capitoli conclusivi vengono trattate similitudini e omotetie e presentate varie applicazioni dell'algebra alla geometria. In appendice sono presenti cenni sulle equazioni algebriche di secondo grado o ad esse riconducibili.

Napoli 4 dicembre 2017

GLI AUTORI

Indice

Parte I

15 Concetti primitivi della geometria

- | | |
|---|---------|
| 1. Punto, retta, piano | 282 (2) |
| 2. Proprietà della retta. Semiretta. Segmento | 284 (4) |
| 3. Proprietà del piano. Semipiani. Angoli | 285 (5) |
| 4. La congruenza fra segmenti | 286 (6) |
| 5. La congruenza fra angoli | 289 (9) |

16 Triangoli e poligoni

- | | |
|---|----------|
| 1. Spezzate e poligoni | 294 (14) |
| 2. Triangoli | 295 (15) |
| 3. Congruenze di triangoli | 297 (17) |
| 4. Primo criterio di congruenza dei triangoli | 297 (17) |
| 5. Secondo criterio di congruenza dei triangoli | 299 (19) |
| 6. Terzo criterio di congruenza dei triangoli | 300 (20) |
| 7. Bisettrice di un angolo | 301 (21) |
| 8. Punto medio di un segmento | 302 (22) |
| 9. Teorema dell'angolo esterno | 302 (22) |

17 Rette perpendicolari e rette parallele

- | | |
|---|----------|
| 1. Rette perpendicolari | 305 (25) |
| 2. Alcune definizioni: altezza, mediana, bisettrice di un triangolo | 307 (27) |
| 3. Rette parallele | 308 (28) |
| 4. Distanza tra due punti e tra un punto e una retta | 311 (31) |
| 5. Distanza di due rette parallele | 312 (32) |
| 6. Trasversali di un fascio di rette parallele | 313 (33) |

18	Relazione tra elementi dei poligoni. Luoghi geometrici	
1.	Somma degli angoli di un triangolo	316 (36)
2.	Somma degli angoli di un poligono	317 (37)
3.	Disuguaglianze tra elementi di un poligono	318 (38)
4.	Luoghi geometrici	319 (39)
19	Trasformazioni isometriche nel piano	
1.	Trasformazioni geometriche	321 (41)
2.	Isometrie	321 (41)
3.	Le principali isometrie	324 (44)
4.	La simmetria rispetto ad un punto (o simmetria centrale)	325 (45)
5.	La simmetria rispetto ad una retta (o simmetria assiale)	326 (46)
6.	Traslazioni	327 (47)
7.	Rotazioni	328 (48)
8.	Composizione (o prodotto) di isometrie	329 (49)
9.	Gruppi di trasformazioni isometriche	331 (51)
20	Quadrilateri particolari: trapezi e parallelogrammi	
1.	Trapezi	335 (55)
2.	Parallelogrammi	337 (57)
3.	Parallelogrammi particolari	338 (58)
21	La circonferenza	
1.	Generalità sulla circonferenza e sul cerchio	342 (62)
2.	Circonferenze congruenti	344 (64)
3.	Confronto e somma di archi	345 (65)
4.	Proprietà delle circonferenze	346 (66)
5.	Posizioni reciproche di una retta e di una circonferenza	350 (70)
6.	Posizioni reciproche di due circonferenze complanari	352 (72)
7.	Angoli alla circonferenza	354 (74)

22	Poligoni inscritti e circoscritti. Poligoni regolari	
1.	Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza	359 (79)
2.	Punti notevoli di un triangolo	359 (79)
3.	Quadrilateri inscritti e circoscritti ad una circonferenza	362 (82)
4.	Poligoni regolari	363 (83)

23	Equivalenza di figure poligonali	
1.	Definizioni e prime proprietà	368 (88)
2.	La equiscomponibilità come relazione di equivalenza	369 (89)
3.	Equivalenze di parallelogrammi e triangoli	370 (90)
4.	Teoremi di Euclide e di Pitagora	373 (93)
5.	Trasformazioni di poligoni	375 (95)

Parte II

9	Curve nel piano cartesiano	
1.	Introduzione	178 (98)
2.	L'equazione della circonferenza	178 (98)
3.	Problemi sulla circonferenza	182 (102)
4.	Traslazione degli assi coordinati	187 (107)
5.	L'equazione della parabola	189 (109)
6.	Problemi sulla parabola	194 (114)
7.	L'equazione dell'iperbole equilatera	196 (116)

10	Problemi di primo e secondo grado	
1.	Introduzione	198 (118)
2.	Problemi descritti da equazioni di secondo grado in una incognita	198 (118)
3.	Problemi descritti da sistemi di equazioni di primo o secondo grado in due o più incognite	200 (120)
4.	Problemi descritti da sistemi di equazioni o disequazioni di primo grado	202 (122)

11	Rapporti fra grandezze. Teorema di Talete	
1.	Classi di grandezze omogenee	207 (127)
2.	Misura delle grandezze	209 (129)
3.	Rapporto fra due grandezze	210 (130)
4.	Grandezze proporzionali	212 (132)
5.	Teorema di Talete	214 (134)
6.	Teoremi sulle bisettrici di un triangolo	217 (137)
12	Similitudini e omotetie	
1.	Triangoli simili	220 (140)
2.	Applicazioni della similitudine dei triangoli	223 (143)
3.	Corde e secanti di una circonferenza	224 (144)
4.	Poligoni simili	225 (145)
5.	Relazioni tra perimetri di poligoni simili	227 (147)
6.	Relazioni fra poligoni simili e quadrati di lati omologhi	228 (148)
7.	Sezione aurea di un segmento	229 (149)
8.	Risoluzione di problemi	231 (151)
9.	La similitudine come trasformazione geometrica nel piano	232 (152)
10.	Omotetie	235 (155)
13	Area dei poligoni. Applicazioni dell'algebra alla geometria	
1.	Area di un poligono	238 (158)
2.	Area del rettangolo e di altri particolari poligoni	238 (158)
3.	Formulazione algebrica dei teoremi di Pitagora e di Euclide. Prime applicazioni	240 (160)
4.	Ulteriori applicazioni dell'algebra alla geometria	244 (164)
5.	Costruzione geometrica di qualche espressione algebrica	248 (168)
6.	Esempi di risoluzione di alcuni problemi geometrici	248 (168)

Parte III

2 Richiami di aritmetica

- | | |
|--|----------|
| 1. Proprietà dell'addizione e della moltiplicazione nell'insieme N dei numeri naturali | 22 (176) |
| 2. Sottrazione e divisione fra numeri naturali | 23 (177) |
| 3. Confronto fra numeri naturali | 24 (178) |
| 4. Il teorema della divisione con resto.
Numeri primi | 25 (179) |
| 5. Massimo comun divisore e minimo comun multiplo | 28 (182) |
| 6. Potenze di numeri naturali | 32 (186) |
| 7. Sistemi di numerazione | 34 (188) |

3 Equazioni di secondo grado

- | | |
|--|----------|
| 1. Introduzione alle equazioni di secondo grado | 54 (194) |
| 2. Risoluzione delle equazioni di secondo grado incomplete | 55 (195) |
| 3. Risoluzione delle equazioni di secondo grado complete | 57 (197) |
| 4. La formula risolutiva ridotta | 61 (201) |
| 5. Relazioni tra le radici ed i coefficienti di un'equazione di secondo grado. Conseguenze | 62 (202) |
| 6. Regola dei segni di Cartesio | 65 (205) |
| 7. Scomposizione di un trinomio di secondo grado | 67 (207) |
| 8. Equazioni frazionarie | 68 (208) |
| 9. Alcuni problemi sulle equazioni di secondo grado | 69 (209) |

4 Equazioni riducibili al secondo grado. Equazioni irrazionali

- | | |
|--|----------|
| Premessa: equazioni abbassabili di grado | 75 (215) |
| 1. Le equazioni binomie | 77 (217) |
| 2. Le equazioni biquadratiche | 78 (218) |
| 3. Le equazioni trinomie | 79 (219) |
| 4. Le equazioni reciproche | 80 (220) |
| 5. Equazioni irrazionali | 87 (227) |

Parte I

Estratti da

Matematica 1

N. Fusco • C. Sbordone • M. Tassalini

- 15 **Concetti primitivi della geometria**
- 16 **Triangoli e poligoni**
- 17 **Rette perpendicolari e rette parallele**
- 18 **Relazione tra elementi dei poligoni.
Luoghi geometrici**
- 19 **Trasformazioni isometriche nel piano**
- 20 **Quadrilateri particolari: trapezi e parallelogrammi**
- 21 **La circonferenza**
- 22 **Poligoni inscritti e circoscritti. Poligoni regolari**
- 23 **Equivalenza di figure poligonali**

1. Punto, retta, piano

Gli *oggetti elementari* della geometria sono il **punto**, la **retta** ed il **piano**, considerati come elementi, ovvero parti dello **spazio**.

Di questi enti non si dà la definizione, in quanto essi costituiscono dei **concetti primitivi**, che verranno via via precisati attraverso le relazioni che introdurremo.

Il piano e la retta sono insiemi di punti e la prima relazione che si considera è quella di *appartenenza* di un punto ad una retta o ad un piano.

Conveniamo di indicare:

- *i punti*: con lettere maiuscole $A, B, C, \dots, P, Q, \dots$;
- *le rette*: con lettere minuscole $a, b, c, \dots, r, s, \dots$;
- *i piani*: con lettere minuscole $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ dell'alfabeto greco.

In figura 15.1 è rappresentato un piano α , contenente una retta r e due punti A e B , uno *appartenente* alla retta r e l'altro *non appartenente* ad r .

Per indicare che la retta r è *contenuta* nel piano α si dice anche che r *appartiene* al piano α o che *giace* sul piano α , ovvero che il piano α *passa* per r .

Per indicare che il punto B appartiene alla retta r si dice anche che B *giace* su r ovvero che r *passa* per B .

Per poter procedere nello studio della geometria, dobbiamo introdurre, accanto agli oggetti elementari, anche delle *affermazioni primitive*, dette **assiomi** o **postulati**, il cui scopo è quello di descrivere le relazioni tra gli enti primitivi.

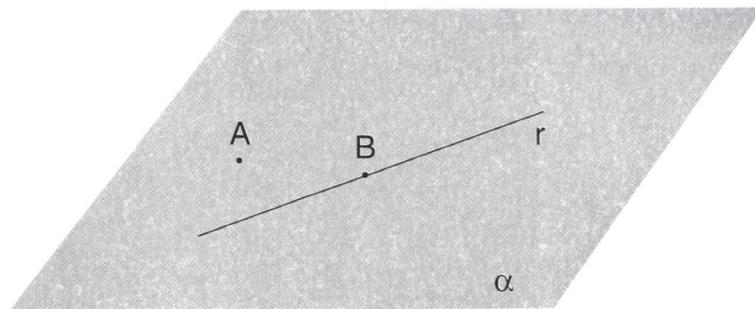


Fig. 15.1 - Il punto B appartiene alla retta r che giace sul piano α , il punto A non vi appartiene.

A

ASSIOMA 1. *Lo spazio contiene infiniti piani. Ogni piano contiene infinite rette ed ogni retta contiene infiniti punti.*

A

ASSIOMA 2. *Per due punti passa una ed una sola retta (Fig. 15.2).*

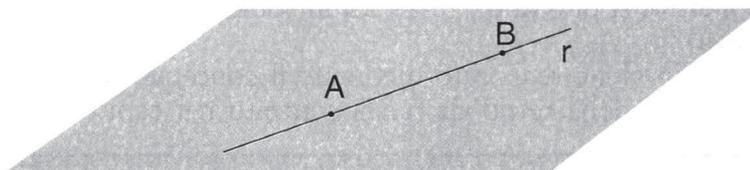


Fig. 15.2 - La retta r è individuata dai suoi due punti A e B . Essa è la loro congiungente e viene anche detta: retta AB .

Si noti che dall'assioma 2 segue che:

- se due rette hanno in comune due punti, allora esse coincidono;
- due rette r e s distinte hanno al più un punto in comune, (cioè o uno o nessun punto in comune) (Fig. 15.3).

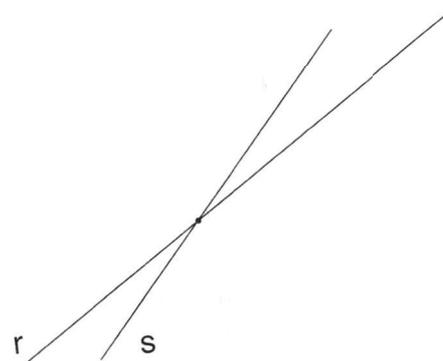


Fig. 15.3 - Le due rette distinte r e s hanno un solo punto in comune.

I seguenti assiomi riguardano proprietà del piano:

A

ASSIOMA 3. *Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano (Fig. 15.4).*

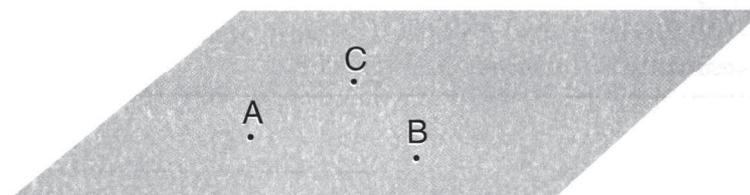


Fig. 15.4 - Il piano α è individuato dai suoi tre punti A , B , C , non allineati.

A

ASSIOMA 4. *La retta passante per due punti distinti di un piano, giace su quel piano (Fig. 15.5).*

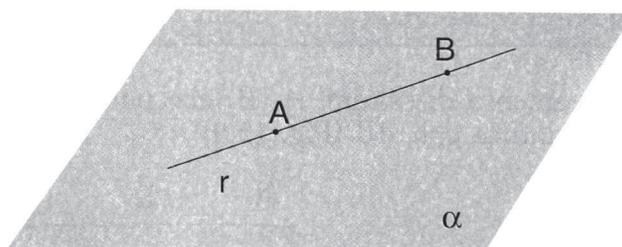


Fig. 15.5 - La retta r passante per due punti A , B del piano α , giace completamente sul piano α .

2. Proprietà della retta. Semiretta. Segmento

Così come un tratto stradale può esser percorso in due sensi, opposto l'uno dell'altro, si può immaginare di introdurre anche sulla retta due versi (di percorrenza).

Ciò viene realizzato mediante il concetto di *relazione d'ordine* (nell'insieme dei punti della retta) da noi incontrato nel capitolo quinto.

A

ASSIOMA 5. *L'insieme dei punti di una retta può essere ordinato mediante due relazioni d'ordine, l'una opposta dell'altra, detti versi della retta.*

Una retta su cui sia fissato un **verso** si dice **orientata**.

Se A e B sono due punti della retta r , orientata nel verso indicato in figura 15.6, mediante una freccia:



Fig. 15.6 - Il punto B segue A nel verso indicato.

diremo che B segue A , in tale verso. Considerando il verso opposto, diremo che A segue B (Fig. 15.7):



Fig. 15.7 - Il punto A segue B nel verso indicato.

L'assioma 5 viene ulteriormente precisato aggiungendo che l'ordinamento è *totale* (cioè, di due punti c'è sempre uno che precede l'altro) e che sulla retta orientata *non esistono né il primo né l'ultimo punto*.

D

Fissato un punto O sulla retta r , esso la divide in due parti, che si chiamano **semirette di origine** O (Fig. 15.8).



Fig. 15.8 - Le due semirette di origine O .

Ciascuna delle due semirette di origine O è costituita dall'origine O e da tutti i punti che seguono O in uno dei due versi della retta.

D

L'insieme dei punti di una retta r compresi fra due punti A e B di r si chiama **segmento di estremi** A, B .

Il segmento di estremi A, B , che pure si considerano appartenenti al segmento, si indica con AB (Fig. 15.9):



Fig. 15.9 - Il segmento AB .

Evidentemente, il segmento AB è:

l'intersezione:

della semiretta AB di origine A

e

della semiretta BA di origine B

(v. Fig. 15.10):

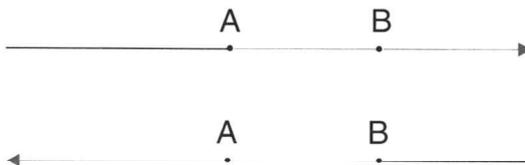


Fig. 15.10 - Il segmento AB , come intersezione di due semirette.

3. Proprietà del piano. Semipiani. Angoli

Così come una strada che attraversi completamente una città la divide in due parti e non è possibile passare da una parte all'altra senza attraversare la strada stessa, analoga situazione si presenta per una retta che giace in un piano. Appare perciò naturale accettare il seguente:

A

ASSIOMA 6. Una retta r del piano α divide il piano, privato della retta stessa, in due parti.

L'assioma 6 si completa precisando che *il segmento congiungente due punti A, B di α (fuori di r) non interseca r solo se A, B appartengono ad una stessa di tali parti* (Fig. 15.11).

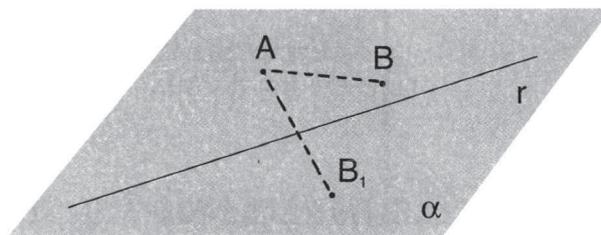


Fig. 15.11 - La retta r divide il piano α in due parti. I punti A e B appartengono alla stessa parte. I punti A e B_1 appartengono a parti diverse di α .

D

L'unione di r con una delle parti di α di cui all'assioma 6 prende il nome di **semipiano di origine r** .

Dunque esistono sempre due semipiani aventi per origine una certa retta r e la loro intersezione coincide con r .

Due semirette r, s del piano α aventi la stessa origine O (e non sovrapposte),

dividono il piano in due parti β, γ , ciascuna delle quali si chiama **angolo** di *vertice* O e *lati* r, s e si considera comprendente anche i punti di r e s (Fig. 15.12):

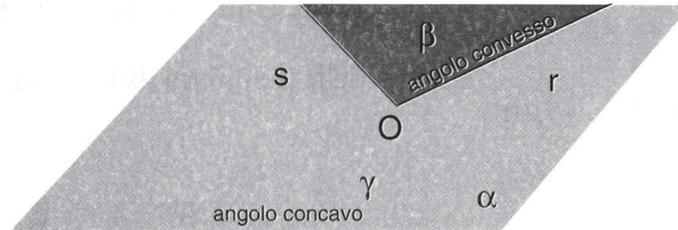


Fig. 15.12 - Le semirette r e s individuano un angolo convesso β ed un angolo concavo γ .

In figura 15.12 l'angolo β si dice **convesso** perché non contiene i prolungamenti dei lati, l'angolo γ si dice invece **concavo**. In seguito, parlando di angolo, si intenderà parlare di angolo convesso, salvo esplicito avviso contrario.

Se le due semirette sono l'una il prolungamento dell'altra (Fig. 15.13):

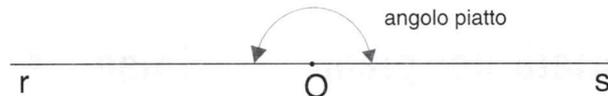


Fig. 15.13 - L'angolo piatto è determinato da due semirette, una delle quali sia il prolungamento dell'altra.

l'angolo si dice **piatto**.

Se le due semirette sono sovrapposte (Fig. 15.14), esse determinano l'**angolo giro** e l'**angolo nullo**.

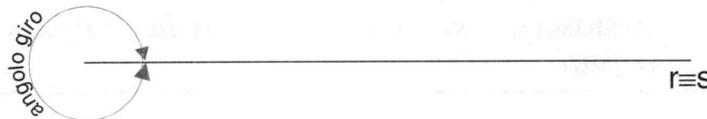


Fig. 15.14 - L'angolo giro e l'angolo nullo sono determinati da due semirette sovrapposte.

Notiamo che l'angolo piatto è un **semipiano**, l'angolo giro coincide con il piano e l'angolo nullo con la semiretta $r = s$.

4. La congruenza fra segmenti

Per **figura piana** intendiamo un qualunque insieme di punti appartenenti tutti ad uno stesso piano. Ad esempio, un angolo o un segmento sono figure piane.

Introduciamo ora il concetto di **congruenza tra segmenti**.

Siano AB e CD due segmenti del piano α come in figura 15.15, cioè "sovrapponibili":

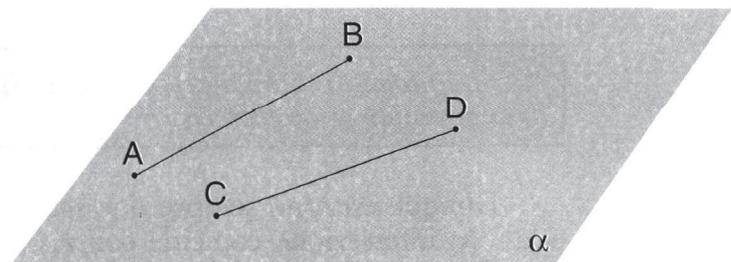


Fig. 15.15 - I segmenti AB e CD sono "sovrapponibili".

nel senso che, se le semirette di origine A e C vengono sovrapposte insieme alle loro origini mediante un opportuno **movimento** (rigido), che lasci B e D dallo stesso lato, allora anche B e D risultano sovrapposti.

In tali ipotesi diremo che i segmenti AB e CD sono **congruenti**.

Ciò **non vuol dire** che AB e CD siano **uguali** tra loro, ma che *esiste una particolare corrispondenza biunivoca tra i punti di AB e quelli di CD , che viene detta **movimento rigido** (o *movimento senza deformazione*).*

Assai importante è il seguente assioma del **trasporto dei segmenti**.

A

ASSIOMA 7. *Dati un segmento AB ed una semiretta s di origine O , esiste un unico punto C sulla semiretta s tale che il segmento OC sia congruente ad AB cioè (Fig. 15.16):*

$$OC \equiv AB$$

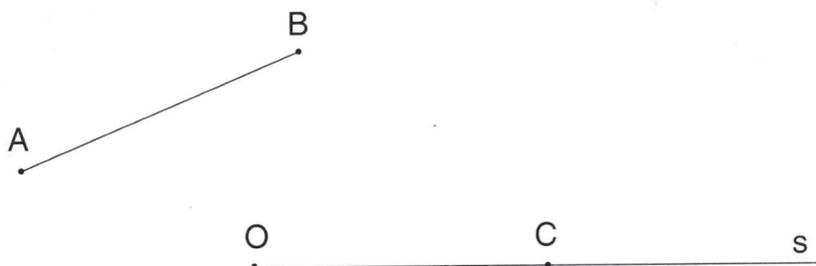


Fig. 15.16 - Vi è un unico punto C sulla semiretta s tale che $AB \equiv OC$.

Confronto e somma di segmenti

Dati due segmenti AB e CD , per *confrontarli*, utilizziamo l'assioma precedente che assicura che sulla semiretta CD vi è un unico segmento CD' congruente ad AB . Si hanno tre casi:

- 1) $D' = D$. Allora $AB \equiv CD$ (Fig. 15.17):

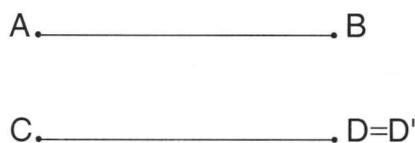


Fig. 15.17.

- 2) D' appartiene al segmento CD (e $D' \neq D$). Allora si dice che il segmento AB è **minore** di CD e si scrive:

$$AB < CD$$

(Fig. 15.18):



Fig. 15.18.

- 3) D appartiene al segmento CD' (e $D \neq D'$). Allora si dice che il segmento AB è **maggiore** di CD e si scrive:

$$AB > CD$$

(Fig. 15.19):

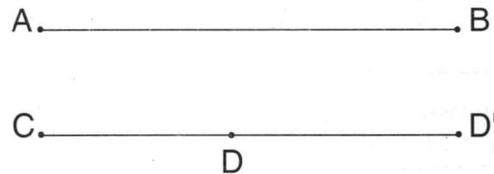


Fig. 15.19.

L'esperienza e l'intuizione suggeriscono gli assiomi seguenti per la congruenza di segmenti (e, più in generale, di figure piane, come vedremo):

- 1) *ogni segmento è congruente a se stesso* (**proprietà riflessiva**);
- 2) *se un segmento è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo* (**proprietà simmetrica**);
- 3) *due segmenti congruenti ad un terzo, sono congruenti tra loro* (**proprietà transitiva**);

Dalle proprietà precedenti segue che *la congruenza è una relazione d'equivalenza* nell'insieme dei segmenti del piano.

Possiamo perciò considerare (paragrafo 5 del capitolo quinto) la *classe d'equivalenza* di un certo segmento AB : essa consiste di tutti (e solo) i segmenti congruenti ad AB . Si suol dire perciò che tutti i segmenti di tale classe **hanno la stessa lunghezza** e si arriva persino ad *identificare la classe di equivalenza di AB con la lunghezza* di AB , proprio perché i segmenti non congruenti ad AB non appartengono a tale classe.

In definitiva **abbiamo definito la lunghezza di segmenti mediante la relazione di congruenza.**

Diamo ora due notevoli definizioni:

D

Due segmenti aventi un solo estremo in comune si dicono **consecutivi** (Fig. 15.20).

D

Due segmenti consecutivi, giacenti sulla stessa retta, si dicono **adiacenti**.

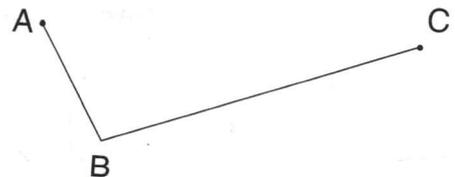


Fig. 15.20 - I segmenti AB e BC sono consecutivi.

Dati due segmenti adiacenti AB e BC , si chiama **somma** di AB e BC , il segmento AC e si scrive $AC = AB + BC$.



Fig. 15.21 - $AC = AB + BC$.

La somma di due segmenti non adiacenti si definisce mediante l'assioma 7. La somma di più segmenti si ottiene addizionando il primo al secondo, la somma ottenuta al terzo e così via.

La somma di n segmenti uguali (o congruenti) al segmento $a = AB$ (con n intero maggiore di 1) si dice **multiplo di a secondo n** e si indica con:

$$na = nAB$$

(Fig. 15.22):

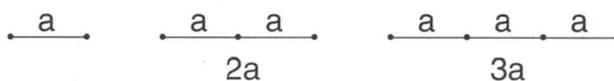


Fig. 15.22 - Multipli del segmento a .

Se il segmento $b = CD$ è multiplo di $a = AB$, secondo n , cioè se:

$$b \equiv na$$

diremo anche che a è sottomultiplo di b secondo n e scriveremo:

$$a \equiv \frac{1}{n} b.$$

Se AB è un segmento maggiore o congruente al segmento CD , si chiama *differenza di AB e CD* il segmento che, addizionato al secondo, riproduce il primo.

5. La congruenza fra angoli

Generalizzando la nozione di congruenza di segmenti, possiamo definire la congruenza tra due figure piane.

Cominciamo con la seguente definizione (che verrà approfondita nel cap. 19°):

D

Due figure piane F e G si dicono **congruenti** se sono sovrapponibili mediante un movimento rigido. In tal caso scriveremo:

$$F \equiv G.$$

Come nel caso dei segmenti, si assume che la congruenza tra figure è una **relazione di equivalenza**, cioè gode delle proprietà:

- (**proprietà riflessiva**): ogni figura è congruente a se stessa, cioè $F \equiv F$;
- (**proprietà simmetrica**): se la figura F è congruente a G , allora anche G è congruente a F ;
- (**proprietà transitiva**): Se F è congruente a G e G è congruente a H , allora F è congruente a H .

Se F è congruente a G , il punto Q di G che venga a sovrapporsi al punto P di F si chiama **omologo** o **corrispondente** di P .

Si verifica che:

- due rette sono sempre congruenti fra loro;
- due semirette sono sempre congruenti fra loro;
- due angoli piatti sono sempre congruenti fra loro.

Soffermiamoci ora sulla *congruenza fra angoli*, enunciando il seguente **assioma del trasporto degli angoli**.

A

ASSIOMA 8. Dati un angolo α ed una semiretta s di origine O , esiste un unico angolo di vertice in O , congruente ad α , avente un lato coincidente con s , giacente da una parte prefissata rispetto alla retta contenente s (Fig. 15.23).

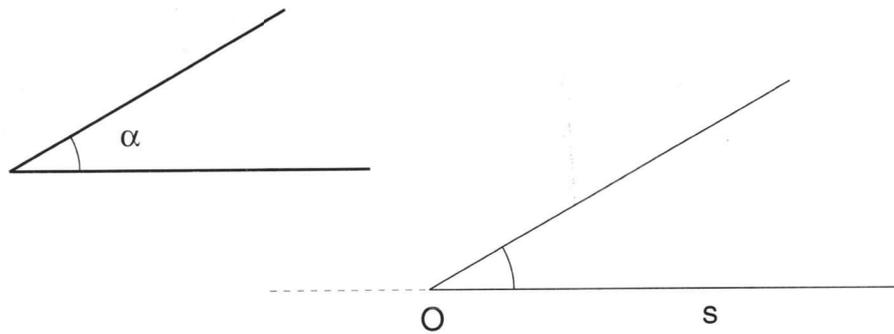


Fig. 15.23 - Vi è un unico angolo di vertice O , lato s , congruente all'angolo α .

Confronto e somma di angoli

Dati due angoli *convessi* $\alpha = \widehat{ab}$ e $\beta = \widehat{cd}$, per *confrontarli*, utilizziamo l'assioma precedente che assicura che, sul semipiano individuato dalla semiretta c in cui giace \widehat{cd} , esiste un unico angolo $\widehat{cd'}$ congruente ad \widehat{ab} . Sovrapponiamo le semirette a e c in modo che le origini coincidano e gli angoli cadano in uno stesso semipiano. Come per i segmenti, si hanno tre casi:

- 1) Le semirette b e d vengono a sovrapporsi. Allora gli angoli ab e cd sono **congruenti**.
- 2) La semiretta d' è contenuta nell'angolo cd (e $d' \neq d$). Allora si dice che l'angolo \widehat{ab} è **minore** di \widehat{cd} e si scrive (Fig. 15.24):

$$\widehat{ab} < \widehat{cd}$$

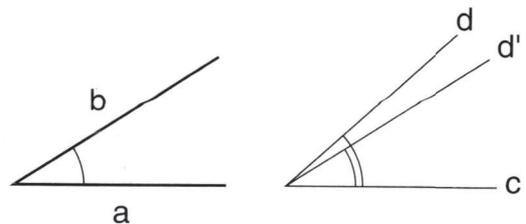


Fig. 15.24.

- 3) La semiretta d è contenuta nell'angolo cd' (e $d \not\equiv d'$). Allora si dice che l'angolo \widehat{ab} è **maggiore** di \widehat{cd} e si scrive (Fig. 15.25):

$$\widehat{ab} > \widehat{cd}$$

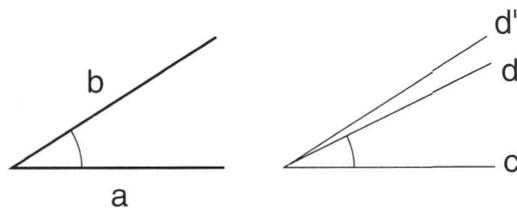


Fig. 15.25.

Similmente a quanto fatto nel caso della congruenza di segmenti, anche nel caso degli angoli, a partire dalla relazione d'equivalenza generata dalla congruenza si perviene ad un'importante definizione.

Precisamente, consideriamo la classe di equivalenza di un certo angolo α : essa consiste di tutti (e solo) gli angoli congruenti ad α . Si vuol dire perciò che tutti gli angoli di tale classe **hanno la stessa ampiezza**, e si arriva ad identificare la classe di equivalenza di α con l'**ampiezza** di α .

In definitiva, **l'ampiezza di un angolo α può essere definita come la classe di equivalenza di α , mediante la relazione di congruenza.**

Diamo ora due notevoli definizioni.

D

Due angoli aventi vertici e uno dei lati coincidenti, mentre gli altri due giacciono in semipiani opposti rispetto al lato comune, si dicono **consecutivi** (Fig. 15.26).

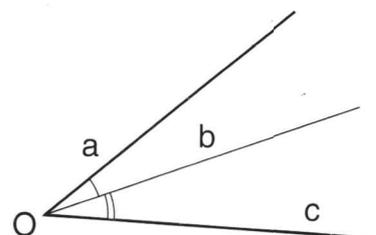


Fig. 15.26 - Gli angoli \widehat{ab} e \widehat{bc} sono consecutivi.

D

Due angoli consecutivi, i cui lati non comuni siano allineati, si dicono **adiacenti** (Fig. 15.27).

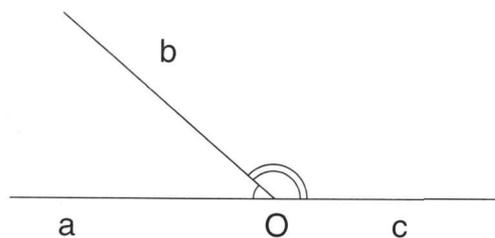


Fig. 15.27 - Gli angoli \widehat{ab} e \widehat{bc} sono adiacenti.

Dati due angoli consecutivi \widehat{ab} , \widehat{bc} , l'angolo \widehat{ac} si chiama **somma** di \widehat{ab} e \widehat{bc} e si scrive:

$$\widehat{ac} \equiv \widehat{ab} + \widehat{bc}.$$

Se gli angoli \widehat{ab} e \widehat{cd} **non sono consecutivi**, si chiama **somma** di \widehat{ab} e \widehat{cd} l'angolo che si ottiene addizionando due angoli consecutivi congruenti ad \widehat{ab} e \widehat{cd} rispettivamente (Fig. 15.28):

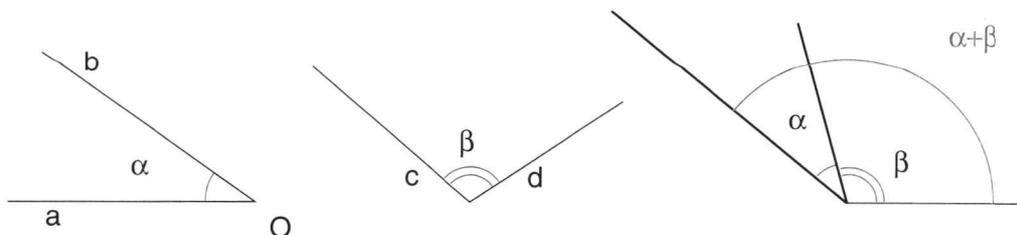


Fig. 15.28 - La somma di due angoli non consecutivi $\alpha = \widehat{ab}$ e $\beta = \widehat{cd}$.

N. Fusco • C. Sbordone

Fondamenti di matematica per la formazione di base

Elementi di geometria



www.edises.it



€ 15,00

