

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Modelli matematici	1
1.2	Equazioni a derivate parziali	2
1.3	Problemi ben posti	6
1.4	Notazioni e nozioni preliminari	7
1.5	Serie di Fourier	11
1.6	Domini regolari e Lipschitziani	14
1.7	Formule di integrazione per parti	16
2	Diffusione	19
2.1	L'equazione di diffusione	19
2.1.1	Introduzione e prime proprietà	19
2.1.2	La conduzione del calore	21
2.1.3	Problemi ben posti ($n = 1$)	23
2.1.4	Un esempio elementare. Il metodo di separazione delle variabili	26
2.1.5	Problemi in dimensione $n > 1$	34
2.2	Principi di massimo e questioni di unicità	37
2.3	La soluzione fondamentale	41
2.3.1	Soluzione fondamentale ($n = 1$)	41
2.3.2	La distribuzione di Dirac	45
2.3.3	Soluzione fondamentale ($n > 1$)	49
2.4	Passeggiata aleatoria simmetrica ($n = 1$)	50
2.4.1	Calcoli preliminari	51
2.4.2	La probabilità di transizione limite	54
2.4.3	Dalla passeggiata aleatoria al moto Browniano	56
2.5	Diffusione, trasporto e reazione	60
2.5.1	Passeggiata aleatoria con deriva (drift)	60
2.5.2	Inquinante in un canale	62
2.5.3	Passeggiata aleatoria con deriva e reazione	65

2.6	Passeggiata aleatoria multidimensionale	66
2.6.1	Il caso simmetrico	66
2.6.2	Passeggiata con deriva e reazione	70
2.7	Un esempio di diffusione e reazione ($n = 3$)	70
2.8	Il problema di Cauchy globale ($n = 1$)	76
2.8.1	Il caso omogeneo	76
2.8.2	Esistenza della soluzione	78
2.8.3	Il caso non omogeneo. Metodo di Duhamel	80
2.8.4	Principio di massimo globale. Unicit�	83
2.9	Un'applicazione alla finanza matematica	86
2.9.1	Un modello di evoluzione per il prezzo	87
2.9.2	L'equazione di Black-Scholes	90
2.9.3	Le soluzioni	93
2.9.4	Strategia di copertura (self-financing strategy)	98
2.10	Due modelli non lineari	100
2.10.1	Diffusione non lineare. Equazione dei mezzi porosi	101
2.10.2	Reazione non lineare. Equazione di Fischer	104
	Problemi	107
3	Equazione di Laplace	115
3.1	Introduzione	115
3.2	Problemi ben posti. Unicit�	116
3.3	Funzioni armoniche	118
3.3.1	Funzioni armoniche nel discreto	118
3.3.2	Propriet� di media	122
3.3.3	Principi di massimo	124
3.3.4	Il problema di Dirichlet in un cerchio. Formula di Poisson	126
3.3.5	Disuguaglianza di Harnack e teorema di Liouville	131
3.3.6	Una soluzione probabilistica per il problema di Dirichlet	132
3.3.7	Ricorrenza e moto Browniano	137
3.4	Soluzione fondamentale e potenziale Newtoniano	138
3.4.1	La soluzione fondamentale	138
3.4.2	Il potenziale Newtoniano	140
3.4.3	Formula di scomposizione di Helmholtz	142
3.5	La funzione di Green	147
3.5.1	Potenziali (domini limitati)	147
3.5.2	La funzione di Green per il problema di Dirichlet	148
3.5.3	Formula di rappresentazione di Green	151
3.5.4	La funzione di Neumann	153
3.6	Unicit� in domini illimitati	154
3.6.1	Problemi esterni	154
3.7	Potenziali di superficie	157
3.7.1	Il potenziale di doppio strato	157

3.7.2	Il potenziale di strato semplice	162
3.7.3	Cenno alle equazioni integrali della teoria del potenziale	163
3.8	Funzioni super e subarmoniche. Il metodo di Perron	167
3.8.1	Funzioni super e subarmoniche	167
3.8.2	Il metodo	168
3.8.3	Comportamento alla frontiera	170
	Problemi	173
4	Leggi di conservazione scalari ed equazioni del prim'ordine	179
4.1	Leggi di conservazione	179
4.2	Equazione lineare del trasporto	180
4.2.1	Inquinante in un fiume	180
4.2.2	Sorgente distribuita	182
4.2.3	Estinzione e sorgente localizzata	183
4.2.4	Caratteristiche inflow e outflow	185
4.3	Traffico su strada	187
4.3.1	Un modello di dinamica del traffico	187
4.3.2	Il metodo delle caratteristiche	189
4.3.3	Coda al semaforo	191
4.3.4	Traffico crescente con x	195
4.4	Soluzioni integrali	198
4.4.1	Riesame del metodo delle caratteristiche	198
4.4.2	Definizione di soluzione integrale	201
4.4.3	Condizione di Rankine-Hugoniot	204
4.4.4	Condizione di entropia. Problema di Riemann	207
4.4.5	Soluzioni nel senso della viscosità	211
4.4.6	L'equazione di Burgers con viscosità	215
4.5	Equazioni quasilineari	217
4.5.1	Caratteristiche	217
4.5.2	Il problema di Cauchy (I)	219
4.5.3	Il metodo degli integrali primi	228
4.5.4	Moto di fluidi nel sottosuolo	230
4.6	Equazioni generali del prim'ordine	232
4.6.1	Strisce caratteristiche	232
4.6.2	Il problema di Cauchy (II)	234
4.6.3	Ottica geometrica	237
	Problemi	241
5	Onde e vibrazioni	247
5.1	Concetti generali	247
5.1.1	Tipi di onde	247
5.1.2	Velocità di gruppo e relazione di dispersione	249
5.2	Onde trasversali in una corda	253
5.2.1	Derivazione del modello	253

5.2.2	Energia	255
5.3	L'equazione delle onde unidimensionale	256
5.3.1	Condizioni iniziali e al bordo	256
5.3.2	Separazione delle variabili	258
5.4	La formula di d'Alembert	263
5.4.1	L'equazione omogenea	263
5.4.2	Soluzioni generalizzate e propagazione delle singolarità	267
5.4.3	Soluzione fondamentale	271
5.4.4	L'equazione non omogenea. Metodo di Duhamel	273
5.4.5	Effetti di dispersione e dissipazione	274
5.5	Equazioni lineari del secondo ordine	276
5.5.1	Classificazione	276
5.5.2	Caratteristiche e forma canonica	279
5.6	Equazione delle onde ($n > 1$)	284
5.6.1	Soluzioni speciali	284
5.6.2	Problemi ben posti. Unicità	286
5.7	Due modelli classici	289
5.7.1	Piccole vibrazioni di una membrana elastica	289
5.7.2	Onde sonore nei gas	293
5.8	Il problema di Cauchy	298
5.8.1	Soluzione fondamentale in dimensione $n = 3$ e principio di Huygens	298
5.8.2	Formula di Kirchhoff	301
5.8.3	Il problema di Cauchy in dimensione $n = 2$	304
5.8.4	Equazione non omogenea. Potenziali ritardati	306
5.9	Onde d'acqua lineari	309
5.9.1	Un modello per onde di superficie	309
5.9.2	Adimensionalizzazione e linearizzazione	313
5.9.3	Onde lineari in acqua profonda	315
5.9.4	Interpretazione della soluzione	318
5.9.5	Comportamento asintotico	319
5.9.6	Il metodo della fase stazionaria	321
	Problemi	323
6	Elementi di analisi funzionale	329
6.1	Motivazione	329
6.2	Spazi normati, metrici e topologici. Spazi di Banach	335
6.3	Spazi di Hilbert	342
6.4	Ortogonalità e proiezioni negli spazi di Hilbert	346
6.4.1	Il Teorema di Proiezione	346
6.4.2	Basi ortonormali	351
6.5	Operatori lineari. Spazio duale	357
6.5.1	Operatori lineari	357
6.5.2	Funzionali e spazio duale	360
6.5.3	Aggiunto di un operatore limitato	363

6.6	Problemi variazionali astratti	365
6.6.1	Forme bilineari. Teorema di Lax-Milgram	365
6.6.2	Minimizzazione di funzionali quadratici	370
6.6.3	Approssimazione e metodo di Galerkin	372
6.7	Compattezza	374
6.7.1	Compattezza e convergenza debole	374
6.7.2	Criteri di compattezza in $C(\overline{\Omega})$ e in $L^p(\Omega)$	376
6.7.3	Convergenza debole e compattezza	377
6.7.4	Operatori compatti	381
6.8	Teorema dell'Alternativa di Fredholm	383
6.8.1	Alternativa per problemi variazionali astratti	383
6.8.2	Teorema dell'Alternativa di Fredholm	388
6.9	Spettro di un operatore compatto autoaggiunto	391
6.9.1	Risolvente e spettro (reale) di un operatore lineare continuo	391
6.9.2	Operatori compatti autoaggiunti	393
6.9.3	Applicazione ai problemi variazionali astratti	398
6.10	Teoremi di Punto Fisso	401
6.10.1	Teorema delle Contrazioni	402
6.10.2	Teorema di Schauder	403
6.10.3	Teorema di Leray-Schauder	406
	Problemi	407
7	Distribuzioni e spazi di Sobolev	411
7.1	Distribuzioni	411
7.1.1	Considerazioni preliminari	411
7.1.2	Funzioni test e mollificatori	413
7.1.3	Le distribuzioni	416
7.2	Calcolo differenziale	420
7.2.1	Derivata nel senso delle distribuzioni	420
7.2.2	Gradiente, divergenza, rotore, Laplaciano	422
7.3	Operazioni con le Distribuzioni	425
7.3.1	Moltiplicazione. Regola di Leibniz	425
7.3.2	Composizione	427
7.3.3	Divisione	429
7.3.4	Convoluzione	430
7.3.5	Prodotto diretto o tensoriale	432
7.4	Trasformata di Fourier	433
7.4.1	Distribuzioni temperate	433
7.4.2	Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	436
7.4.3	Formula di sommazione di Poisson. Trasformata del pettine di Dirac	439
7.4.4	Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$	440
7.5	Spazi di Sobolev	441
7.5.1	Una costruzione astratta	441

7.5.2	Lo spazio $H^1(\Omega)$	442
7.5.3	Lo spazio $H_0^1(\Omega)$	446
7.5.4	Duale di $H_0^1(\Omega)$	448
7.5.5	Gli spazi $H^m(\Omega)$, $m > 1$	450
7.5.6	Regole di calcolo	451
7.5.7	Trasformata di Fourier e spazi di Sobolev	452
7.6	Approssimazioni con funzioni regolari ed estensioni	453
7.6.1	Approssimazioni locali	453
7.6.2	Estensioni e approssimazioni globali	454
7.7	Tracce	458
7.7.1	Tracce di funzioni in $H^1(\Omega)$	458
7.7.2	Tracce di funzioni in $H^m(\Omega)$	462
7.7.3	Spazi di tracce	463
7.8	Compattezza e immersioni	465
7.8.1	Teorema di Rellich	465
7.8.2	Disuguaglianze di Poincaré	466
7.8.3	Disuguaglianze di Sobolev in \mathbb{R}^n	468
7.8.4	Immersione di Sobolev in domini limitati	470
7.9	Spazi dipendenti dal tempo	471
7.9.1	Funzioni a valori in spazi di Hilbert	471
7.9.2	Spazi di Sobolev dipendenti dal tempo	473
	Problemi	476
8	Formulazione variazionale di problemi ellittici	481
8.1	Equazioni ellittiche	481
8.2	Tipi di soluzione	483
8.3	Formulazioni variazionali per l'equazione di Poisson	485
8.3.1	Condizioni di Dirichlet	486
8.3.2	Condizioni di Neumann	488
8.3.3	Autovalori e autofunzioni dell'operatore di Laplace	491
8.3.4	Un risultato di stabilità asintotica	493
8.4	Equazioni generali in forma di divergenza	495
8.4.1	Problema di Dirichlet	496
8.4.2	Problema di Neumann	501
8.4.3	Problema di Robin	504
8.4.4	Problema misto	505
8.5	Principi di massimo	507
8.6	Questioni di regolarità	510
8.6.1	Regolarità interna	512
8.6.2	Regolarità globale	513
8.6.3	Domini con angoli	514
8.7	Alcune applicazioni della teoria	517
8.7.1	Uno schema iterativo per equazioni semilineari	517
8.7.2	Equilibrio di una piastra	520
8.7.3	Il sistema di Stokes	522

8.7.4	Equazione di Navier Stokes stazionaria	527
8.7.5	Equazioni dell'elastostatica lineare	533
8.8	Un problema di controllo ottimo	538
8.8.1	Struttura del problema	538
8.8.2	Esistenza e unicità della coppia ottima	540
8.8.3	Moltiplicatori di Lagrange e condizioni di ottimalità	541
8.8.4	Un algoritmo iterativo	543
	Problemi	545
9	Formulazione debole per problemi di evoluzione	555
9.1	Equazioni paraboliche	555
9.2	Il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore	557
9.3	Problemi parabolici astratti	560
9.3.1	Formulazione	560
9.3.2	Stime dell'energia. Unicità e stabilità	563
9.3.3	Le approssimazioni di Faedo-Galerkin	565
9.3.4	Esistenza	566
9.4	Equazioni Paraboliche	568
9.4.1	Problemi per l'equazione del calore	568
9.5	Equazioni generali	572
9.5.1	Esistenza ed unicità	572
9.5.2	Regolarità	575
9.5.3	Principi di massimo debole	577
9.6	Un'equazione di diffusione e reazione non lineare	579
9.6.1	Uno schema iterativo	579
9.6.2	Un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione di Fisher-Kolmogoroff	581
9.7	L'equazione delle onde	583
9.7.1	Equazioni iperboliche	583
9.7.2	Il problema di Cauchy-Dirichlet	583
9.7.3	Il metodo di Faedo-Galerkin	585
9.7.4	Soluzione del problema approssimato	586
9.7.5	Stime dell'energia	587
9.7.6	Esistenza, unicità e stabilità	589
	Problemi	592
10	Sistemi di leggi di conservazione del prim'ordine	595
10.1	Introduzione	595
10.2	Sistemi iperboliche lineari	600
10.2.1	Caratteristiche	600
10.2.2	Soluzioni classiche del problema di Cauchy	601
10.2.3	Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti. Problema di Riemann	604
10.3	Leggi di conservazione quasilineari	608
10.3.1	Caratteristiche e invarianti di Riemann	608
10.3.2	Soluzioni integrali e condizioni di Rankine-Hugoniot	612

10.4 Il problema di Riemann	613
10.4.1 Onde e curve di rarefazione. Sistemi genuinamente non lineari	614
10.4.2 Soluzione del problema di Riemann mediante un'onda di rarefazione	617
10.4.3 Condizione di entropia di Lax. Onde d'urto e discontinuità a contatto	620
10.4.4 Soluzione del problema di Riemann mediante una singola onda d'urto	622
10.4.5 Il caso linearmente degenere	624
10.4.6 Soluzioni locali del problema di Riemann	625
10.5 Il problema di Riemann per il sistema- p	626
Problemi	636
Appendice A. Analisi dimensionale	641
A.1 Un esempio preliminare	641
A.2 Dimensioni e leggi fisiche	643
A.3 Il teorema Pi di Buckingham	644
Appendice B. Misure e integrali	649
B.1 Misura di Lebesgue	649
B.1.1 Un problema di ... conteggio	649
B.1.2 Misure e funzioni misurabili	651
B.2 Integrale di Lebesgue	653
B.2.1 Alcuni teoremi fondamentali	654
B.3 Integrali rispetto a una misura qualunque	656
Appendice C. Identità e formule	659
C.1 Gradiente, divergenza, rotore, Laplaciano	659
C.1.1 Coordinate cartesiane ortogonali	659
C.1.2 Coordinate cilindriche	659
C.1.3 Coordinate sferiche	660
C.2 Identità e formule	661
C.2.1 Formule di Gauss	661
C.2.2 Formule di Stokes	661
C.2.3 Identità vettoriali	662
Riferimenti bibliografici	663
Indice analitico	667